

TW

**stichting
mathematisch
centrum**



AFDELING TOEGEPASTE WISKUNDE

TW

TC 54/73

SEPTEMBER

M. BAKKER

TOEPASSING VAN DE KOMPLEXE REKENING IN DE WISSELSTROOMTHEORIE

2e boerhaavestraat 49 amsterdam

BIBLIOTHEEK MATHEMATISCH CENTRUM
AMSTERDAM

934.026

Printed at the Mathematical Centre, 49, 2e Boerhaavestraat, Amsterdam.

The Mathematical Centre, founded the 11-th of February 1946, is a non-profit institution aiming at the promotion of pure mathematics and its applications. It is sponsored by the Netherlands Government through the Netherlands Organization for the Advancement of Pure Research (Z.W.O), by the Municipality of Amsterdam, by the University of Amsterdam, by the Free University at Amsterdam, and by industries.

Voorwoord

In deze syllabus, die de toepassing van de complexe rekening in de theorie van wisselstroomketens behandelt, wordt de inhoud van de syllabus Complex rekenen, door D.S. Fokkema en E. Slagt bekend verondersteld. De stof van deze syllabus beslaat vijf lesuren.

Amsterdam, september 1973.

§1 Wisselstroomschakelingen

Voor een spoel geldt, dat een verandering van het door de spoel omvatte magnetische veld (de zogenaamde magnetische flux Φ) een spanning (en een stroom) tot gevolg heeft. In formulevorm schrijven we hiervoor

$$(1) \quad V = - \frac{d}{dt} \Phi$$

Nu is $\Phi = LI$, waarbij L de konstante coëfficiënt van zelfinductie is en I de stroomsterkte. Formule (1) wordt dus

$$(2) \quad V = - L \frac{dI}{dt} .$$

Voor de stroomketen met Ohmse weerstand R en zelfinductie L van figuur 1 heeft de uitgebreide wet van Ohm de vorm

$$E_{\text{ind}} + E = IR ,$$

waarbij E_{ind} de spanning over de spoel is en E de elektronotorische kracht (emk., de spanning tussen de aansluitklemmen)

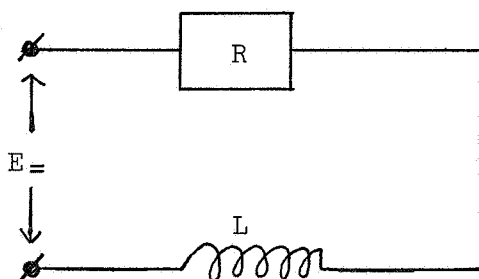


fig.1

Het verband tussen E en I is hier

$$(3) \quad E = RI + L \frac{dI}{dt}$$

Als E de konstante waarde E_0 heeft (gelijkspanning) en $I = 0$ op het tijdstip $t = 0$, dan heeft (3) als oplossing

$$(4) \quad I = \frac{E_0}{R} \left(1 - e^{-\frac{Rt}{L}} \right) \approx \frac{E_0}{R} , \quad t \gg \frac{L}{R}$$

Opgave: Controleer (4) in (3).

Voor een condensator met capaciteit C geldt de formule

$$Q = CV,$$

waarbij Q de lading van de condensator is en V de spanning tussen de platen.
Omdat

$$I = \frac{dQ}{dt} = C \frac{dV}{dt},$$

is het verband tussen I en V

$$V = \frac{1}{C} \int I(t) dt.$$

Voor een RC-keten met emk. E geldt de formule

$$(5) \quad E = V_R + V_C = RI + \frac{1}{C} \int I(t) dt.$$

* * *

We onderzoeken nu de wisselstroomketen met een zelfinductie L en een weerstand R van figuur 2. De emk. is gegeven door de formule

$$E = V_0 \cos \omega t, \quad \omega = 2\pi v = \frac{2\pi}{T},$$

waarbij T de periode is en v de frekwentie; ω heet de hoekfrekwentie.

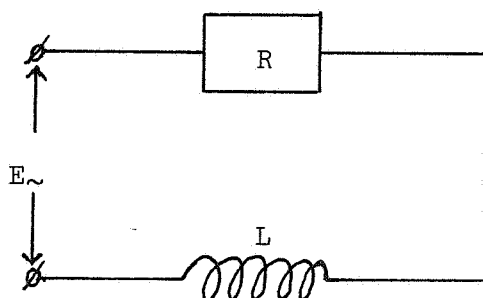


fig.2

Passen we formule (3) toe, dan krijgen we

$$(6) \quad V_0 \cos \omega t = RI + L \frac{dI}{dt}.$$

Omdat E periodiek is met periode T , ligt het voor de hand, dat I ook periodiek is met dezelfde periode (we verwaarlozen inschakelverschijnselen).

I hoeft evenwel niet noodzakelijk op hetzelfde tijdstip als E zijn maximale waarde aan te nemen. We proberen daarom de oplossing

$$I = I_0 \cos \omega(t-t_0) ,$$

waarbij I_0 en t_0 nog onbepaalde konstanten zijn. I_0 heet de amplitudo van de stroomsterkte, t_0 heet het fazeverschil tussen I en V.

In de elektriciteit is het gebruikelijk om in plaats van met t_0 met de grootte ωt_0 te werken; ωt_0 heet de fazehoek en wordt aangegeven met ϕ .

Bovenstaande formule wordt dus

$$(7) \quad I = I_0 \cos(\omega t - \phi) .$$

Vullen we (7) in (6) in, dan krijgen we

$$(8) \quad V_0 \cos \omega t = I_0 \{ R \cos(\omega t - \phi) - \omega L \sin(\omega t - \phi) \} .$$

Werken we (8) uit, dan krijgen we

$$\begin{aligned} V_0 \cos \omega t &= I_0 R (\cos \omega t \cos \phi + \sin \omega t \sin \phi) \\ &\quad - I_0 \omega L (\sin \omega t \cos \phi - \cos \omega t \sin \phi) = \\ &= I_0 \cos \omega t (R \cos \phi + \omega L \sin \phi) \\ &\quad + I_0 \sin \omega t (R \sin \phi - \omega L \cos \phi) . \end{aligned}$$

Omdat (9) een identiteit is, zijn de coëfficiënten van $\sin \omega t$ en $\cos \omega t$ in linker- en rechterlid gelijk. Hieruit volgt, dat

$$(10) \quad \begin{cases} V_0 = I_0 (R \cos \phi + \omega L \sin \phi) , \\ 0 = I_0 (R \sin \phi - \omega L \cos \phi) . \end{cases}$$

Voor I_0 en ϕ vinden we dan, dat

$$(10a) \quad \begin{cases} \cos \phi = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} , & \sin \phi = \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} , \\ I_0 = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \end{cases}$$

De grootheid $\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}$ noemt men de impedantie van de LR-keten, notatie $|Z|$. $|Z|$ is blijkbaar gelijk aan $\frac{V_0}{I_0}$. Algemeen definiëert men de impedantie van een *wisselstroomketen* als het quotiënt van de amplitudo's van de spanning en de stroomsterkte dus

$$|Z| = \frac{V_0}{I_0}.$$

Opgave 1. Ga na, dat bij een wisselstroomketen met condensator C, weerstand R, hoekfrequentie ω en spanningsamplitudo V_0 de impedantie en de fazehoek worden gegeven door

$$|Z| = \sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}},$$

$$\cos \phi = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}}, \quad \sin \phi = \frac{-1}{\sqrt{1 + \omega^2 C^2 R^2}}.$$

Gebruik hiervoor formule (5).

Opgave 2. Bekijk achtereenvolgens een wisselstroomketen, waarin alleen een spoel en waarin resp. alleen een condensator zijn opgenomen; in beide gevallen is de spanningsamplitudo V_0 en de hoekfrequentie ω . Ga na, dat in het eerste geval de fazehoek gelijk is aan $\frac{\pi}{2}$ en in het tweede geval $-\frac{\pi}{2}$.

* * *

We bekijken nu een wisselstroomketen met een spoel, een weerstand en een condensator, zie figuur 3.

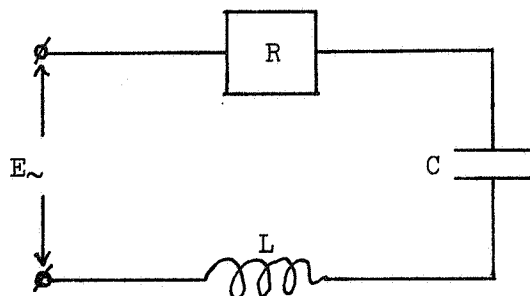


fig.3

De vergelijking voor de stroomsterkte wordt nu

$$(11) \quad V_0 \cos \omega t = RI + L \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} \int I(t) dt$$

Stellen we weer $I = I_0 \cos(\omega t - \phi)$, dan krijgen we

$$V_0 \cos \omega t = I_0 \{ R \cos(\omega t - \phi) + (\frac{1}{\omega C} - \omega L) \sin(\omega t - \phi) \} .$$

Uitwerking hiervan geeft

$$\begin{aligned} V_0 \cos \omega t &= I_0 \cos \omega t \{ R \cos \phi + (\omega L - \frac{1}{\omega C}) \sin \phi \} \\ &+ I_0 \sin \omega t \{ R \sin \phi - (\omega L - \frac{1}{\omega C}) \cos \phi \} . \end{aligned}$$

Hieruit volgen voor I_0 en ϕ de formules

$$(12) \quad \begin{cases} \sin \phi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} , \\ \cos \phi = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} , \\ I_0 = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} . \end{cases}$$

Terwijl in een RL-keten de fazehoek positief is ($\phi < \frac{\pi}{2}$) en die in een RC-keten negatief ($> -\frac{\pi}{2}$), kan de fazehoek in een LCR-keten alle waarden tussen $-\frac{\pi}{2}$ en $+\frac{\pi}{2}$ aannemen.

Het kan blijkbaar voorkomen, dat $\phi = 0$, dus dat

$$\omega L = \frac{1}{\omega C} .$$

In dat geval gedraagt de LCR-keten zich schijnbaar als een R-keten ondanks de aanwezigheid van de spoel en de condensator. We spreken dan van resonantie tussen de spoel en de condensator.

§2 Verband tussen impedantie, fazehoek en complexe getallen

We bekijken in het complexe vlak de getallen

$$Z_1 = R + i\omega L \quad ,$$

$$Z_2 = R - \frac{i}{\omega C} \quad ,$$

$$Z_3 = R + i\omega L - \frac{i}{\omega C} \quad ,$$

met argumenten ϕ_1 , ϕ_2 en ϕ_3

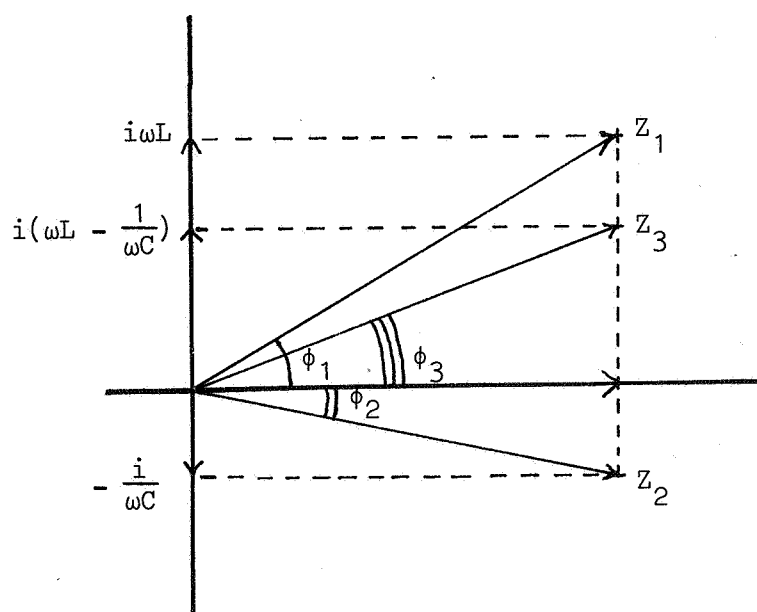


fig.4

Van deze getallen merken wij op dat

$$|Z_1| = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}, \quad \cos \phi_1 = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}, \quad \sin \phi_1 = \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}},$$

$$|Z_2| = \sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}, \quad \cos \phi_2 = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}}, \quad \sin \phi_2 = \frac{-1}{\sqrt{1 + \omega^2 C^2 R^2}},$$

$$|Z_3| = \sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}, \quad \cos \phi_3 = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}}, \quad \sin \phi_3 = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}}.$$

We zien nu, dat de modulus en het argument van Z_1 overeenkomen met de impedantie en de fazehoek van een LR-keten. Evenzo komen de modulus en het argument van Z_2 resp. Z_3 overeen met de impedantie en fazehoek van een RC-keten, resp. van een RCL-keten.

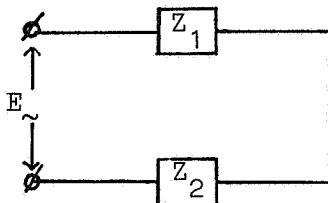
Opgave: Ga na, dat de moduli en argumenten van de getallen R , $i\omega L$ en $-\frac{i}{\omega C}$ overeenkomen met de impedanties en fazehoeken van een R-keten, resp. een L-keten en een C-keten.

Aan deze drie voorbeelden zien we, dat een wisselstroomketen in beginsel volledig kan worden beschreven door een complex getal Z (impedantie = $|Z|$, fazehoek = $\arg(Z)$). Dit getal Z heet de komplexe impedantie van de wisselstroomketen (niet te verwarren met de eerder gedefiniëerde impedantie).

Voor deze complexe impedantie gelden de volgende rekenregels

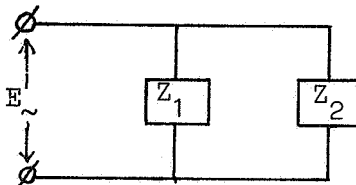
1) $Z_R = R$; $Z_L = i\omega L$; $Z_C = \frac{-i}{\omega C}$

2) Serieschakeling:



$$Z_{\text{tot}} = Z_1 + Z_2 .$$

3) Parallelschakeling:



$$\frac{1}{Z_{\text{tot}}} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} .$$

De regels 2) en 3) kunnen ook uitgebreid worden voor meer dan twee impedanties.

We illustreren nu het gemak van een complexe impedantie aan de hand van een LR-keten.

We vatten V en I op als de reële delen van de complexe getallen

$$\tilde{V} = V_0 e^{i\omega t} , \quad \tilde{I} = I_0 e^{i(\omega t - \phi)} ,$$

waarbij V_0 en I_0 weer positief zijn. We kunnen nu formule (6) toepassen op $\tilde{V}$ en $\tilde{I}$ en krijgen dan

$$\begin{aligned} V_0 e^{i\omega t} &= RI_0 e^{i(\omega t - \phi)} + i\omega L I_0 e^{i(\omega t - \phi)} \\ &= I_0 e^{i(\omega t - \phi)} (R + i\omega L) . \end{aligned}$$

Delen we links en rechts door $e^{i\omega t}$, dan krijgen we

$$(13) \quad V_0 = I_0 e^{-i\phi} (R + i\omega L) .$$

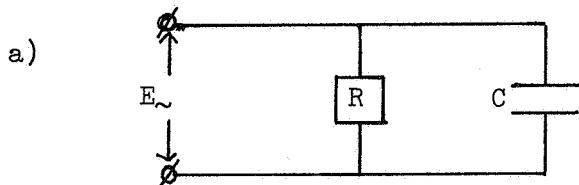
Aangezien linker- en rechterlid van (13) reëel en positief moeten zijn, krijgen we door reëel en imaginair deel gelijk te stellen

$$V_0 = I_0 (R \cos \phi + \omega L \sin \phi) ,$$

$$0 = -R \sin \phi + \omega L \cos \phi ,$$

wat precies overeenkomt met (1.10). Het is dus duidelijk, dat met behulp van complexe getallen de fazehoek en de impedantie van een wisselstroom-schakeling aanzienlijk sneller gevonden kunnen worden.

Tot slot berekenen we de impedantie en fazehoek van twee eenvoudige schakelingen.



$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_C} + \frac{1}{Z_R} = \frac{1}{\frac{-i}{\omega C}} + \frac{1}{R} = i\omega C + \frac{1}{R} ;$$

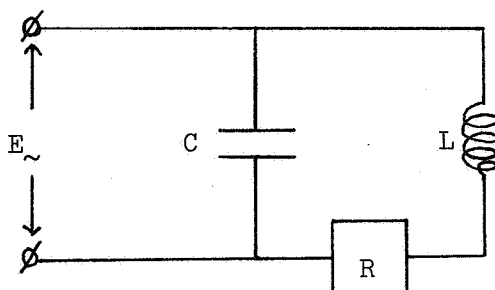
$$Z = \frac{R}{1 + i\omega CR} = \frac{R(1 - i\omega CR)}{1 + \omega^2 C^2 R^2} ;$$

$$\text{impedantie} = |Z| = \frac{R}{\sqrt{1 + \omega^2 C^2 R^2}} ;$$

$$\text{fazehoek} = \arg(z) = \phi = \arg(1 - i\omega CR) ;$$

$$\cos \phi = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 C^2 R^2}} ; \quad \sin \phi = \frac{-\omega CR}{\sqrt{1 + \omega^2 C^2 R^2}} .$$

b)



$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_C} + \frac{1}{Z_L + Z_R} = i\omega C + \frac{1}{R + i\omega L} ;$$

$$Z = \frac{1}{i\omega C + \frac{1}{R + i\omega L}} = \frac{R + i\omega L}{1 - \omega^2 LC + i\omega CR} = \frac{R + i [L(1 - \omega^2 LC) - CR^2]}{(1 - \omega^2 LC)^2 + \omega^2 C^2 R^2} ;$$

$$\text{impedantie} = |Z| = \frac{|R + i\omega L|}{|1 - \omega^2 LC + i\omega CR|} = \sqrt{\frac{R^2 + \omega^2 L^2}{(1 - \omega^2 LC)^2 + \omega^2 C^2 R^2}} ;$$

$$\text{fazehoek} = \arg(z) = \arg(R + i\omega [L(1 - \omega^2 C^2 L^2) - CR^2]) ;$$

$$\cos \phi = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \omega^2 [L(1 - \omega^2 C^2 L^2) - CR^2]^2}} ;$$

$$\sin \phi = \frac{\omega [L(1 - \omega^2 C^2 L^2) - CR^2]}{\sqrt{R^2 + \omega^2 [L(1 - \omega^2 C^2 L^2) - CR^2]^2}} .$$

Opgave: Bereken in de volgende schakelingen de impedantie en de fazehoek.

In alle gevallen is $E = V_0 \cos \omega t$.

